LICZBY CAŁKOWITE I UŁAMKI

P | Zaokrąglanie liczb naturalnych

Zaokrąglij do tysięcy liczby 97 463 i 783 592.

$$97\,467 \approx 97\,000$$

Następna cyfra po cyfrze tysięcy (cyfra setek) jest mniejsza od 5, więc cyfra tysięcy się nie zmienia, a następne zastępujemy zerami, czyli zaokrąglamy w dół.

$$783\,592 \approx 784\,000$$

Następna cyfra po cyfrze tysięcy (cyfra setek) jest większa od 4, więc cyfrę tysięcy zwiększamy o 1, a następne zastępujemy zerami, czyli zaokrąglamy w górę.

Jeżeli zaokrąglenie liczby jest mniejsze od tej liczby, to nazywamy je przybliżeniem z niedomiarem, jeśli jest większe — przybliżeniem z nadmiarem.

Dzielenie z resztą

P | 20 : 3 = 6 reszta 2 25 : 4 = 6 reszta 1 50 : 9 = 5 reszta 5

Uwaga. Zamiast pisać 20 : 6 = 3 reszta 2, możemy pisać krótko 20 : 6 = 3 r 2.

Cechy podzielności

- Liczba jest podzielna przez 2, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8.
- Liczba jest podzielna przez 10, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0.
- Liczba jest podzielna przez 5, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.
- Liczba jest podzielna przez 100, gdy jej ostatnie dwie cyfry to 00.
- Liczba jest podzielna przez 3, gdy suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 3.
- Liczba jest podzielna przez 9, gdy suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 9.
- Liczba jest podzielna przez 4, gdy dwie jej ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4

Liczby podzielne przez 2 nazywamy liczbami parzystymi.

Liczby pierwsze i złożone

Liczba naturalna, która ma dokładnie dwa różne dzielniki, to **liczba pierwsza**.
Liczby pierwsze to: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113...

Każda liczba pierwsza jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie.

Liczby naturalne różne od zera, które mają więcej niż dwa różne dzielniki nazywamy **liczbami złożonymi**.

Liczby 0 i 1 nie są liczbami pierwszymi ani złożonymi.

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Każdą liczbę naturalną złożoną można przedstawić w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych. Mówimy wówczas, że rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze. Zobacz, jak można znaleźć rozkłady liczb 40 i 1350 na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{rr|l} & 1350 & 2 \\ 1350:2 \rightarrow & 675 & 3 \\ 675:3 \rightarrow & 225 & 3 \\ 225:3 \rightarrow & 75 & 3 \\ 75:3 \rightarrow & 25 & 5 \\ 25:5 \rightarrow & 5 & 5 \\ 5:5 \rightarrow & 1 & \end{array}$$

$40 = 2 \cdot 20 = 2 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

$1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

Wielokrotności liczby 10:

0	10	20	30	40	50	**60**
70	80	90	100	110	**120**	130
140	150	160	170	**180**	190	200
210	220	230	**240**	250	260	270
280	290	**300**	310	320	330	340

Wielokrotności liczby 12:

0	12	24	36	48	**60**	72
84	96	108	**120**	132	144	156
168	**180**	192	204	216	228	240
252	264	276	288	**300**	312	324

Obok zapisano kolejne wielokrotności liczb 10 i 12. Zaznaczone liczby: 60, 120, 180, 240, 300 to wspólne, różne od zera wielokrotności liczb 10 i 12. Najmniejszą z nich jest liczba 60. Możemy to zapisać w skrócie tak:

NWW (10,12) – 60

Czytamy: najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 10 i 12 to 60.

Największy wspólny dzielnik (NWD)

Obok wypisano dzielniki liczb 12 i 18. Zaznaczone liczby: 1, 2, 3, 6 to wspólne dzielniki tych liczb.
Największym wspólnym dzielnikiem jest 6. Możemy to zapisać tak:

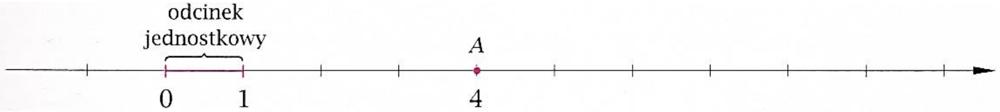
NWD(12,18) = 6

Czytamy: największy wspólny dzielnik liczb 12 i 18 to 6.

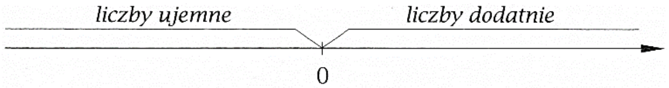
Dzielniki liczby 12:
1 2 3 4 6 12

Dzielniki liczby 18:
1 2 3 6 9 18

Liczby na osi liczbowej



Każdą liczbę można przedstawić na osi liczbowej. Liczby ujemne są na lewo od zera, liczby dodatnie — na prawo. Zero nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.

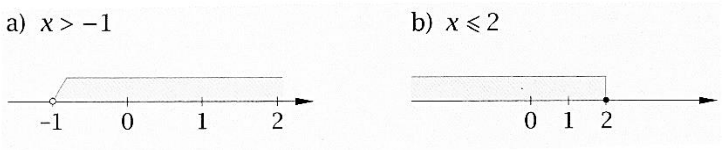


Dla dowolnej liczby zaznaczonej na osi liczbowej — na lewo od niej są liczby od niej mniejsze, a na prawo — większe.

Ilustracja prostych nierówności na osi liczbowej

Na osi liczbowej możemy zaznaczyć liczby spełniające podany warunek.

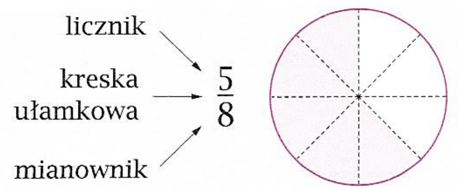
P | Zaznacz na osi liczby spełniające podany warunek:



Porównywanie liczb całkowitych

Aby porównać dwie liczby, warto sobie wyobrazić ich położenie na osi liczbowej. Ta liczba, która leży bardziej na prawo na osi liczbowej, jest większa.

Ułamki zwykłe



Jeśli koło podzielimy na 8 równych części, to 5 takich części stanowi $\frac{5}{8}$ tego koła.

Ułamek, którego licznik i mianownik mają taką samą wartość, jest równy 1.

Ułamek, w którym licznik jest mniejszy od mianownika, to ułamek właściwy. W przeciwnym przypadku jest to ułamek niewłaściwy.

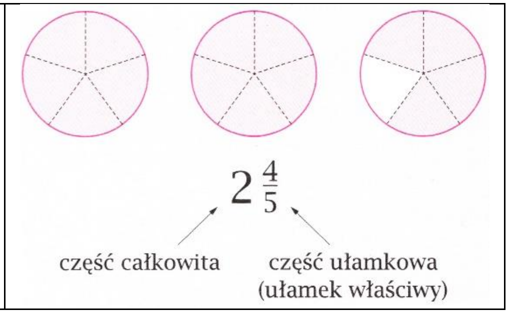
Przykłady ułamków właściwych: $\frac{6}{11}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{50}{51}$

Przykłady ułamków niewłaściwych: $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{19}{18}$, $\frac{629}{1}$

Ułamek to także inny zapis dzielenia, np.: $5:9 = \frac{5}{9}$, $7:23 = \frac{7}{23}$

Liczby mieszane

Dwa koła i cztery piąte koła to inaczej $2\frac{4}{5}$ koła. Tego typu liczby nazywamy mieszanymi. Liczby mieszane można zapisać w postaci ułamków niewłaściwych i na odwrót. Każdy ułamek niewłaściwy można zamienić na liczbę mieszaną lub liczbę naturalną.



P | Zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

$$6\frac{2}{5} = \frac{6 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{32}{5} \qquad 4\frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 7 + 6}{7} = \frac{34}{7}$$

P | Zamień ułamki niewłaściwe na liczby mieszane (lub liczby naturalne).

$$\frac{30}{5} = 30:5 = 6 \qquad \frac{18}{7} = 18:7 = 2\frac{4}{7} \quad (18:7 = 2\ r\ 4)$$

Rozszerzanie i skracanie ułamków zwykłych

Rozszerzyć ułamek zwykły to znaczy pomnożyć jego licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera. Skrócić ułamek zwykły to znaczy podzielić jego licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera. Ułamki po skróceniu lub rozszerzeniu nie zmieniają swojej wartości, zmienia się jedynie forma ich zapisu.

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne to inaczej zapisane ułamki zwykłe o mianownikach 10, 100, 1000…

$$\frac{2}{10} = 0{,}2 \qquad \frac{16}{100} = 0{,}16 \qquad \frac{1}{1000} = 0{,}001 \qquad 7\frac{23}{100} = 7{,}23$$

Pierwsza cyfra po przecinku to cyfra części dziesiątych, druga — części setnych, trzecia części tysięcznych itd.

P | Zamień ułamki dziesiętne: 0,25; 7,4; 0,05 na ułamki zwykłe.

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \qquad 7{,}4 = 7\frac{4}{10} = 7\frac{2}{5} \qquad 0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

P | Zamień ułamki zwykłe: $\frac{9}{25}; \frac{45}{50}; \frac{13}{8}$ na ułamki dziesiętne.

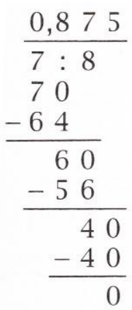
Ułamek zwykły można zamienić na dziesiętny poprzez:

- rozszerzanie: $\frac{9}{25} = \frac{9\cdot4}{25\cdot4} = \frac{36}{100} = 0{,}36$
- skracanie: $\frac{45}{50} = \frac{45:5}{50:5} = \frac{9}{10} = 0{,}9$
- podzielenie licznika przez mianownik: $\frac{13}{8} = 13:8 = 1{,}625$

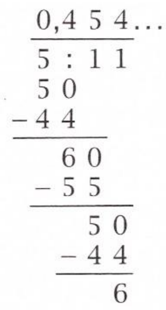
Rozwinięcie dziesiętne ułamka

Każdy ułamek zwykły można zapisać w postaci dziesiętnej, czyli podać jego rozwinięcie dziesiętne. Ułamki mają rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone.

P | Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.



$\frac{7}{8} = 7:8 = 0{,}875$



$\frac{5}{11} = 5:11 = 0{,}4545... = 0{,}(45)$

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych

Zasady zaokrąglania ułamków dziesiętnych są podobne do zasad zaokrąglania liczb naturalnych.

P | Zaokrąglij do części setnych liczby 0,32471 oraz 5,71836.

$$0{,}32471 \approx 0{,}32000 \;=\; 0{,}32$$

Cyfra części tysięcznych jest mniejsza od 5, więc cyfra części setnych się nie zmienia, a następne zastępujemy zerami

$$5{,}71836 \approx 5{,}72000 \;=\; 5{,}72$$

Cyfra części tysięcznych jest większa od 4, więc cyfrę części setnych zwiększamy o 1, a następne zastępujemy zerami.

Porównywanie ułamków

P | Która z liczb: 20,789 i 20,749 jest większa?

20,789 > 20,749 *789 tysięcznych to więcej niż 749 tysięcznych.*

P | Która z liczb: 4,63 i 4,631 jest większa?

4,63 < 4,631 *4,63 = 4,630, a 630 tysięcznych to mniej niż 631 tysięcznych.*

Ułamki zwykłe można porównywać na kilka sposobów.

Jeśli dwa ułamki mają jednakowe mianowniki, to ten z nich jest większy, który ma większy licznik, np. $\frac{12}{19} > \frac{10}{19}$

Jeśli dwa ułamki mają jednakowe liczniki, to ten z nich jest większy, który ma mniejszy mianownik, np. $\frac{13}{20} > \frac{13}{30}$

Aby porównać ułamki o różnych licznikach i mianownikach, sprowadzamy je do wspólnego mianownika lub licznika, albo zamieniamy na ułamki dziesiętne, które łatwiej jest porównać.

Liczby przeciwne, odwrotności liczb

Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$. Dla $a \neq 0$ odwrotnością liczby a jest $\frac{1}{a}$.

Liczba	a	$\frac{2}{3}$	0	1	-7	$-0{,}04$
Liczba przeciwna	$-a$	$-\frac{2}{3}$	0	-1	7	$0{,}04$
odwrotność liczby	$\frac{1}{a}$	$\frac{3}{2}$	nie istnieje	1	$-\frac{1}{7}$	-25

Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględna liczby dodatniej lub równej 0 jest równa tej liczbie. Wartość bezwzględna liczby ujemnej jest przeciwną do niej liczbą dodatnią.

P | $|7| = 7$ $|-20| = 20$ $|600| = 600$ $|0| = 0$ $|-0{,}3| = 0{,}3$